ملخص الوحدة الاولي جبر

تذكر نظرية ذات الحدين

إذا كان : أ ، س ∈ ح ، ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن :

(١) $(س + أ)^{ن} = ق_{ن.} س^{ن} + ق_{ن١} س^{ن-١} أ + ق_{ن٢} س^{ن-٢} أ^{٢} + ... + ق_{نر} س^{ن-ر} أ^{ر} + ... + ق_{نن} أ^{ن}$

(٢) $(س - أ)^{ن} = ق_{ن.} س^{ن} - ق_{ن١} س^{ن-١} أ + ق_{ن٢} س^{ن-٢} أ^{٢} - ... + (-١)^{ن} ق_{نن} أ^{ن}$

لاحظ أن :

✪ من مفكوك $(س + أ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية

(١) عدد حدود المفكوك = (ن + ١) حدًا. (٢) فى أى حد يكون : أس (س) + أس (أ) = ن

(٣) الحد العام : $ح_{ر+١} = ق_{نر} أ^{ر} س^{ن-ر}$

(٤) $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{أ}{س}$ ، $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

(٥) رتبة الحد من البداية = عدد حدود المفكوك − ترتيب الحد من النهاية + ١

(٦) إذا كانت ن زوجية فإن رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن}{٢} + ١$

، إذا كانت ن فردية فإن رتبتا الحدان الأوسطان $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

(٧) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$ أى ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة.

$(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$ أى ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة.

✪ مجموع معاملات حدود مفكوك : $(أ س + ب ص)^{ن} = (أ + ب)^{ن}$

✪ فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ حيث ك ∈ ط نتبع ما يلى :

(١) نوجد $ح_{ر+١}$ فى أبسط صورة له لتحديد أس المتغير س بدلالة ر

(٢) نساوى أس المتغير س الناتج فى $ح_{ر+١}$ بالأس المطلوب ك للحصول على قيمة ر ومنها نحدد الحد الذى يحتوى على $س^{ك}$ وهو $ح_{ر+١}$

(٣) نوجد الحد المشتمل على $س^{ك}$ بالتعويض عن قيمة ر التى حصلنا عليها فى $ح_{ر+١}$

لاحظ أن : (١) إذا كانت قيمة ر التى حصلنا عليها لا تنتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن هذا يدل على أنه لا يوجد حد مشتمل على س أس ك المطلوبة.

(٢) إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالى من س فنعتبر أن المطلوب إيجاد الحد المشتمل على $س^{٠}$

أى نساوى أس المتغير س فى $ح_{ر+١}$ بالصفر ونوجد قيمة ر

✪ لإيجاد أكبر حد عدديًا فى مفكوك (أ س + ب ص)^{ن} عند قيمة معلومة لكل من س ، ص

نفرض أن : ح$_{ر+١}$ هو أكبر حد عدديًا فى المفكوك

فيكون : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} \leq ١$ ومنها $\frac{ن - ر + ١}{ر} \times |\frac{ب ص}{أ س}| \leq ١$ ونستنتج المتباينة : ر ≥ م

ويكون : $\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} \geq ١$ ومنها $\frac{ن - (ر+١) + ١}{ر + ١} \times |\frac{ب ص}{أ س}| \geq ١$ ونستنتج المتباينة : ر ≤ ك

ومنها نوجد قيم ر الصحيحة التى تحقق المتباينة : ك ≥ ر ≥ م فيكون الحد أو الحدود التى رتبتها (ر + ١) هى أكبر حدود المفكوك عدديًا.

✪ لإيجاد أكبر معامل عدديًا فى مفكوك (أ س + ب ص)^{ن} نوجد أكبر حد عدديًا فى المفكوك عند س = ص = ١

لاحظ أن : ● فى مفكوك (١ + س)^{ن}

① إذا كان : ن عددًا زوجيًا فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط = $ق_{\frac{ن}{٢}}^{ن}$

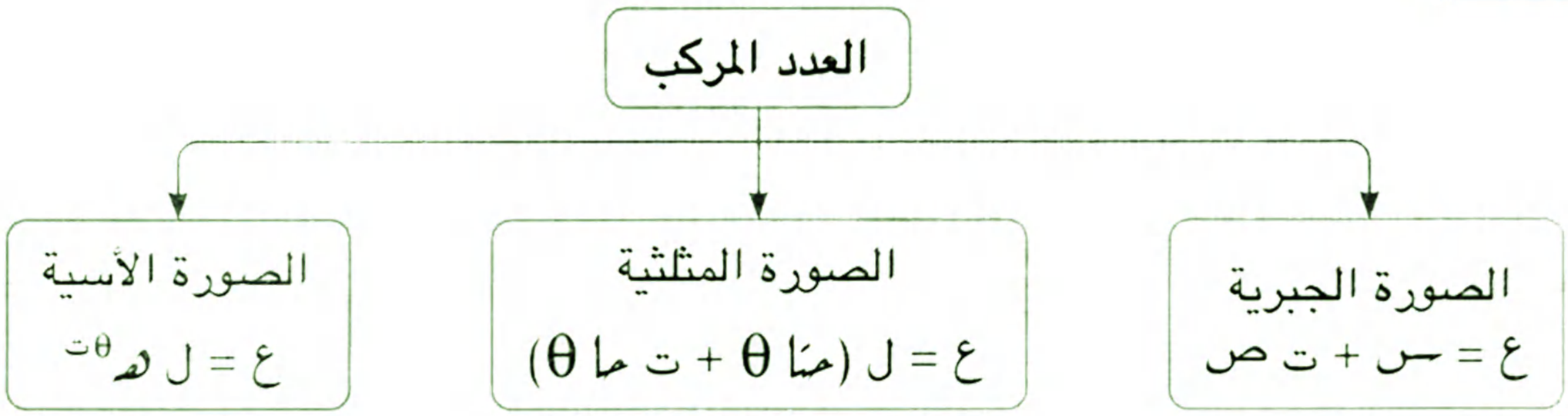
② إذا كان : ن عددًا فرديًا فإن : معاملا الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أى منها هو أكبر معامل فى المفكوك

$= ق_{\frac{ن-١}{٢}}^{ن}$ أو $ق_{\frac{ن+١}{٢}}^{ن}$

● فى مفكوك (١ − س)^{ن} المعامل الذى له أكبر قيمة عددية (قيمة مطلقة) = أكبر معامل فى مفكوك (١ + س)^{ن}

ملخص الوحدة الثانية جبر

الأعداد المركبة



الصورة الجبرية

* ع = س + ت ص حيث س ∈ ح ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = −١

* $\overline{ع}$ = س − ت ص «مرافق العدد ع»

$\overline{ع_{١} + ع_{٢}}$ = $\overline{ع_{١}}$ + $\overline{ع_{٢}}$ ، $\overline{ع_{١} ع_{٢}}$ = $\overline{ع_{١}}$ × $\overline{ع_{٢}}$

* ع + $\overline{ع}$ = ٢ س «حقيقى صرف» ، ع − $\overline{ع}$ = ٢ ت ص «تخيلى صرف»

، ع $\overline{ع}$ = س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢} حيث ل مقياس العدد المركب «| ع |»

* إذا كان : ع = س فإن : $\overline{ع}$ = س

، إذا كان : ع = ت ص فإن : $\overline{ع}$ = − ت ص

* إذا كان : ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ فإن :

- ع$_{١}$ ± ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ ± س$_{٢}$) + (ص$_{١}$ ± ص$_{٢}$) ت
- ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + (س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$) ت
- $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = $\frac{ع_{١} \times \overline{ع_{٢}}}{ع_{٢} \overline{ع_{٢}}}$ «أى نضرب كلًا من البسط والمقام فى مرافق المقام»
- إذا كان : ع$_{١}$ = ع$_{٢}$ فإن : س$_{١}$ = س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

الصورة المثلثية

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص فى الصورة الجبرية ، فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع

هى : $ع = ل (جتا \theta + ت \, جا \theta)$ حيث :

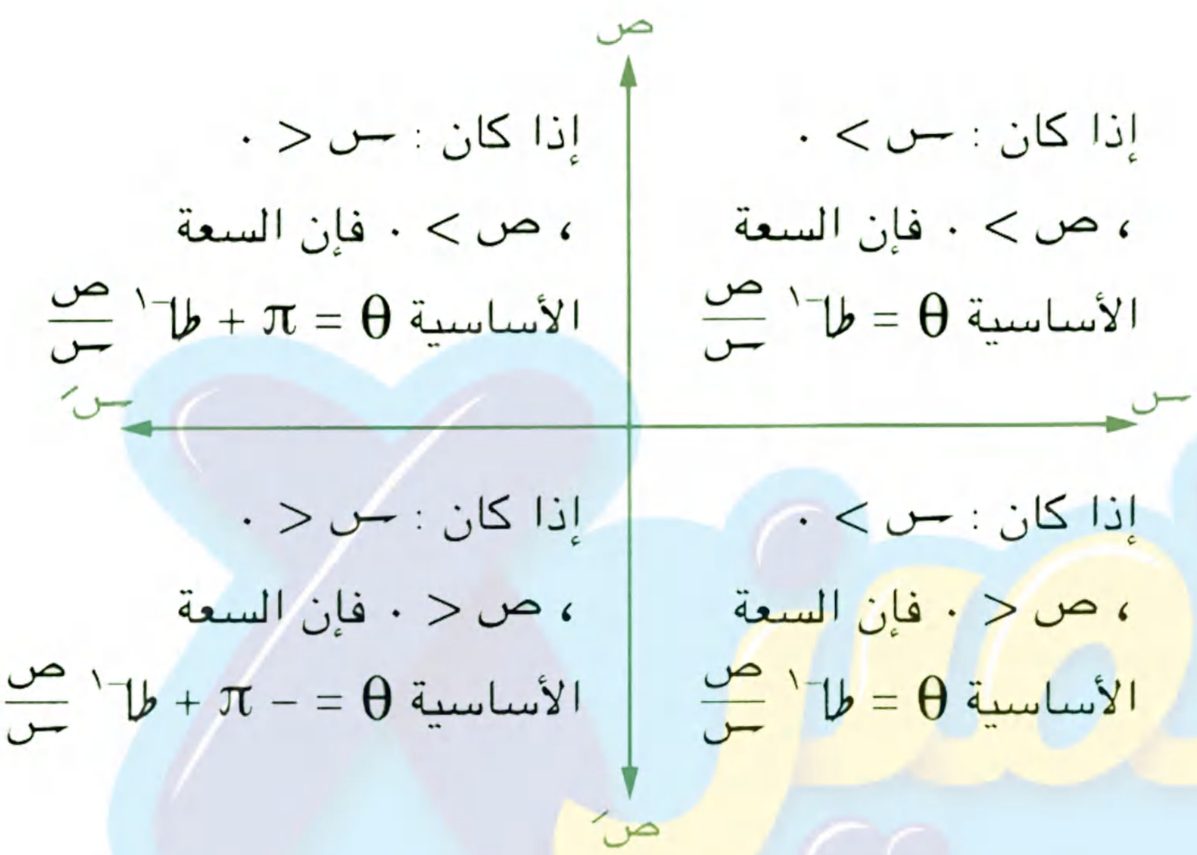
- (ل) تسمى مقياس العدد المركب ع = $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$
- (θ) تسمى سعة العدد المركب ع وتسمى بالسعة الأساسية إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi]$

ولتحديد السعة الأساسية للعدد ع

عند تحويله من الصورة الجبرية

س + ت ص إلى الصورة المثلثية

نستخدم الشكل المقابل :



لاحظ أنه :

إذا كان العدد المركب مقياسه ل وسعته θ

فإن : $س = ل \, جتا \theta$ ، $ص = ل \, جا \theta$

ويكون :

$ع = ل \, جتا \theta + ت \, ل \, جا \theta = س + ت ص$

هى الصورة الجبرية.

ملاحظات

لكل عدد مركب ع = س + ص ت وسعته θ يكون :

① $|ع| \geq ٠$ مع ملاحظة أن : $|ع| = ٠$ إذا كان ع = ٠

② $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$

③ $ع \, \bar{ع} = |ع|^{٢} = |\bar{ع}|^{٢}$

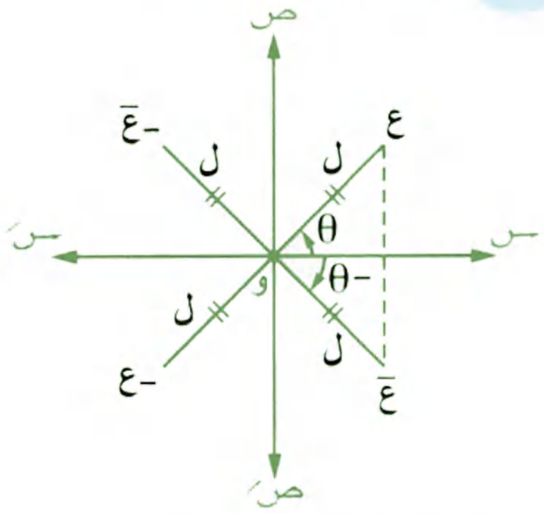
④ سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منته من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة (٢π)

أى أن : سعة العدد المركب = $\theta + ٢\pi \, ن$ حيث $ن \in ص$

⑤ سعة العدد المركب لا تتغير عند ضربه فى عدد حقيقى موجب

أى أن : سعة ع = سعة ك ع حيث $ك \in ح^{+}$

من الرسم



- العدد ومرافقه متماثلان حول محور السينات.
- العدد ومعكوسه الجمعى متماثلان حول نقطة الأصل.
- العدد ومرافقه ومعكوساهما الجمعيين لهم نفس المقياس

تحويل الصورة المثلثية غير القياسية إلي الصورة القياسية

نحدد الربع الذى يقع فيه العدد المركب حسب الإشارة التى أمام الدوال المثلثية بالجزءين الحقيقى والتخيلى ثم نستخدم الشكل التالى :

الربع الأول

- إذا كان : ع = ل (حتا θ + ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تبقى كما هى : ل (حتا θ + ت جا θ)

- إذا كان : ع = ل (جا θ + ت حتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول للصورة ع

= ل [حتا (٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

الربع الثانى

- إذا كان : ع = ل (− حتا θ + ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [حتا (١٨٠° − θ) + ت جا (١٨٠° − θ)]

- إذا كان : ع = ل (− جا θ + ت حتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [حتا (٩٠° + θ) + ت جا (٩٠° + θ)]

الربع الرابع

- إذا كان : ع = ل (حتا θ − ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [حتا (− θ) + ت جا (− θ)]

- إذا كان : ع = ل (جا θ − ت حتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [حتا (٩٠° + θ) + ت جا (٩٠° + θ)]

الربع الثالث

- إذا كان : ع = ل (− حتا θ − ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [حتا (١٨٠° + θ) + ت جا (١٨٠° + θ)]

- إذا كان : ع = ل (− جا θ − ت حتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [حتا (٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

لاحظ أن :

- الطريقة السابقة تستخدم لكل ل > ٠ ، θ ∈ [٠ ، ٢ π[
- إذا كانت السعة التى حصلنا عليها ∈]− π ، π] فإنها تكون هى السعة الأساسية.
- إذا لم تكن السعة التى حصلنا عليها أساسية نضيف إليها ٣٦٠° أو نحذف منها ٣٦٠° نحصل على السعة الأساسية.

الصورة الأسة للعدد المركب (صورة أويلر)

* $\text{جا}\,س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{\lfloor ٢ن+١} س^{٢ن+١} = س - \frac{س^٣}{\lfloor ٣} + \frac{س^٥}{\lfloor ٥} - .....$

* $\text{جتا}\,س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{\lfloor ٢ن} س^{٢ن} = ١ - \frac{س^٢}{\lfloor ٢} + \frac{س^٤}{\lfloor ٤} - \frac{س^٦}{\lfloor ٦} + ...$

* $هـ^{س} = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{س^ن}{\lfloor ن} = ١ + \frac{س}{\lfloor ١} + \frac{س^٢}{\lfloor ٢} + \frac{س^٣}{\lfloor ٣} + ...$

* $هـ^{ت\,س} = \text{جتا}\,س + ت\,\text{جا}\,س$

* الصورة الأسية للعدد المركب هى : $ع = ل\,هـ^{ت\,\theta}$

حيث ل مقياس العدد ع ، θ السعة الأساسية للعدد ع

لاحظ أن

$ت = \text{جتا}\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$ ، $-ت = \text{جتا}\frac{-\pi}{٢} + ت\,\text{جا}\frac{-\pi}{٢} = هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

، $١ = \text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠ = هـ^{\text{صفر}\,ت}$ ، $-١ = \text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi = هـ^{\pi ت}$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة

إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين حيث :

الصورة الجبرية	الصورة المثلثية	الصورة الأسية
$ع_١ = س_١ + ت\,ص_١$ $ع_٢ = س_٢ + ت\,ص_٢$	$ع_١ = ل_١\,(\text{جتا}\,\theta_١ + ت\,\text{جا}\,\theta_١)$ $ع_٢ = ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_٢)$	$ع_١ = ل_١\,هـ^{ت\theta_١}$ $ع_٢ = ل_٢\,هـ^{ت\theta_٢}$
$ع_١\,ع_٢ = (س_١\,س_٢ - ص_١\,ص_٢)$ $+ (س_١\,ص_٢ + س_٢\,ص_١)\,ت$	$ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢\,[\text{جتا}\,(\theta_١ + \theta_٢)$ $+ ت\,\text{جا}\,(\theta_١ + \theta_٢)]$	$ع_١\,ع_٢$ $= ل_١\,ل_٢\,هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$
$ع_١ \div ع_٢$ $= \frac{س_١ + ت\,ص_١}{س_٢ + ت\,ص_٢} \times \frac{س_٢ - ت\,ص_٢}{س_٢ - ت\,ص_٢}$ أى نقوم بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق المقام	$ع_١ \div ع_٢ = \frac{ل_١}{ل_٢}\,[\text{جتا}\,(\theta_١ - \theta_٢)$ $+ ت\,\text{جا}\,(\theta_١ - \theta_٢)]$	$ع_١ \div ع_٢$ $= \frac{ل_١}{ل_٢}\,هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

تعميم : $ع_١\,ع_٢\,...\,ع_ن = ل_١\,ل_٢\,...\,ل_ن\,[\text{جتا}\,(\theta_١ + \theta_٢ + ... + \theta_ن) + ت\,\text{جا}\,(\theta_١ + \theta_٢ + ... + \theta_ن)]$

* مما سبق نستنتج أنه إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) = هـ$^{ت\theta}$ فإن :

(١) ع^{ن} = ل^{ن} [جتا (ن θ) + ت جا (ن θ)] = ل^{ن} هـ$^{ت ن \theta}$

حيث ن ∈ ص$^{+}$ وتسمى نظرية ديموافر بأس صحيح موجب

(٢) ع$^{-١}$ = $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{ل (جتا \theta + ت جا \theta)}$ = $\frac{جتا ٠ + ت جا ٠}{ل}$ [جتا (− θ) + ت جا (− θ)] = $\frac{١}{ل}$ هـ$^{-ت\theta}$

(٣) $\overline{ع}$ = ل (جتا − θ + ت جا − θ) = ل هـ$^{-ت\theta}$

نظرية ديموافر بأس نسبي موجب

* تستخدم لإيجاد الجذر النونى للعدد المركب ع وذلك بوضعه فى الصورة المثلثية :

ع = ل (جتا θ + ت جا θ) ومنها فإن : ع$^{\frac{١}{ن}}$ = ل$^{\frac{١}{ن}}$ [جتا ($\frac{\theta + ٣٦٠° ر}{ن}$) + ت جا ($\frac{\theta + ٣٦٠° ر}{ن}$)]

لكل ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، (ن − ١) ، ن ∈ ص$^{+}$

وإذا كانت السعة بالجذور الناتجة ليست السعة الأساسية يتم تحويلها إلى السعة الأساسية.

ملاحظة

- الجذر النونى للعدد المركب يمكن استنتاجه بحيث تكون سعته هى السعة الأساسية ($\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ن}$) ∈]− π ، π] وذلك بوضع ر = −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، .... وذلك بحيث إذا كان

(١) θ ∈]٠ ، π] أى موجبة نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ ، ٢ ، ... إلى قيم عددها (ن)

«لاحظ إننا بعد الصفر بدأنا بالعدد السالب»

(٢) θ ∈]− π ، ٠] أى سالبة أو صفر نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ ، ... إلى قيم عددها (ن)

«لاحظ أننا بعد الصفر بدأنا بالعدد الموجب»

- فمثلًا :

لإيجاد الجذر الرابع :

نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ (أربعة قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

إذا كانت : θ ∈]٠ ، π] أى موجبة.

نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ (أربعة قيم تبدأ بالموجب بعد الصفر)

إذا كانت : θ ∈]− π ، ٠] أى سالبة أو صفر.

الجذور التربيعية للعدد المركب جبرياً

إذا كان : ع = س + ت ص ، ل = | ع | فإن

- $\sqrt{س + ت ص}$ = ± ($\sqrt{\frac{ل + س}{٢}}$ + $\sqrt{\frac{ل - س}{٢}}$ ت)

- $\sqrt{س - ت ص}$ = ± ($\sqrt{\frac{ل + س}{٢}}$ − $\sqrt{\frac{ل - س}{٢}}$ ت)

فمثلًا : لإيجاد $\sqrt{٣ + ٤ ت}$ ، ل = $\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$ = ٥

∴ $\sqrt{٣ + ٤ ت}$ = ± ($\sqrt{\frac{٥ + ٣}{٢}}$ + $\sqrt{\frac{٥ - ٣}{٢}}$ ت) = ± (٢ + ت)

الجذور النونية

المعادلة $س^{ن} = ف$ حيث $ف$ عدد مركب يكون لها $ن$ من الجذور على الصورة : $س = ف^{\frac{1}{ن}}$ وتقع الجذور جميعًا فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها $| ف^{\frac{1}{ن}} |$ أى الجذر النونى الموجب لمقياس العدد المركب $ف$

وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه $ن$ ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له $= \frac{360°}{ن}$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

* الصورة المثلثية والصورة الجبرية للجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

- الصورة المثلثية هى : $(جتا\ ٠ + ت\ جا\ ٠)$ ، $(جتا\ \frac{2\pi}{3} + ت\ جا\ \frac{2\pi}{3})$ ، $(جتا\ \frac{4\pi}{3} + ت\ جا\ \frac{4\pi}{3})$
- الصورة الجبرية هى : ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

أى أن : الواحد الصحيح له ثلاثة جذور أحدهم حقيقى وهو العدد ١ والآخران غير حقيقيين مترافقين مربع أحدهما يساوى الآخر.

* مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر

أى أن : $١ + ω + ω^{٢} =$ صفر ومنها $ω^{٢} = -ω - ١$ ، $ω^{٢} + ١ = -ω$ ، $ω^{٢} + ω = -١$

* حاصل ضرب الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ١

أى أن : $ω^{٣} = ١$ ومنها $ω^{٢} = \frac{١}{ω}$ ، $ω = \frac{١}{ω^{٢}}$

* الفرق بين الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح $= \pm \sqrt{٣}$ ت

أى أن : $ω^{٢} - ω = \pm \sqrt{٣}$ ت أ، $ω^{٢} - ω = \pm \sqrt{٣}$ ت

ملاحظة

(١) مرافق العدد $ω$ هو $ω^{٢}$ وبالتالى يكون : مرافق العدد $(١ + ω)$ هو $(١ + ω^{٢})$

ومرافق العدد $(٢٠٢٤ + ت\ ω)$ هو $(٢٠٢٤ - ت\ ω^{٢})$

ومرافق العدد $(ف\ ω - ب\ ω^{٢})$ هو $(ف\ ω^{٢} - ب\ ω)$ لكل $ف ، ب \in ح$

(٢) $ω^{ن^{٣}} = ١$ ، $ω = ω^{ن^{٣} + ١}$ ، $ω^{٢} = ω^{ن^{٣} + ٢}$ حيث $ن \in ص$

* الجذور النونية للواحد الصحيح :

إذا كان $ع^{ن} = ١$ فإن : $ع = (جتا\ ٠° + ت\ جا\ ٠°)^{\frac{١}{ن}} = جتا\ \frac{ر\ 2\pi}{ن} + ت\ جا\ \frac{ر\ 2\pi}{ن}$

حيث $ر \in ص$ ، $\frac{ر\ 2\pi}{ن} \in]-\pi ، \pi]$

وتمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه $ن$ وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها ١ ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له $= \frac{360°}{ن}$

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK